Def: Zwei $n\times n$-Matrizen A, B heißen <u>ähnlich</u> falls eine invertierbare $n\times n$ Matrix C existiert mit $A = C^{-1}BC$.

Schreibe $A \sim B$.

Bem: Nach den Ergebnissen der letzten Woche bedeutet das, dass es eine Basis C gibt (die Spalten von C!), sodass

$$A = B_{CC}.$$

Similarly we have

$$A_{C'C'} = B$$

for C' the basis formed by the columns of C^{-1}.

Ziel: Gegeben $A \in \mathrm{Mat}(n\times n)$, finde B ähnlich zu A, sodass B möglichst einfach.

Bem: Für jede $n\times n$-Matrix A gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ sodass

$$A_{st_n,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & * \\ 0 & & 1 & \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform ist (das folgt aus dem Gauß-Jordan Algorithmus, siehe Übung).

Weiterhin gibt es B' Basis von $\mathbb{R}^m$ mit

$$A_{B'B} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $m=n$ ist aber oft nützlich $B'=B$ zu fordern.

<u>Def</u> $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ heißt <u>diagonalisierbar</u>, falls

$$A \sim \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

<u>Def</u> $v \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Eigenvektor</u> zu A falls

$$A \cdot v = \lambda v \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ist $v \neq 0$ so ist λ eindeutig bestimmt.

<u>Def</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt <u>Eigenwert</u> von A falls ein $v \neq 0$ existiert mit $Av = \lambda v$.

Setze $\mathrm{Eig}_\lambda(A) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \lambda v \}$.

<u>Beob:</u>
- A hat Diagonalform bzgl. Basis B
  $\Leftrightarrow$ B besteht aus Eigenvektoren zu A.
- A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt Basis B von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.
- $\mathrm{Eig}_\lambda(A) = \ker(\lambda \cdot E_n - A)$.
- λ Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $\lambda E_n - A$ nicht invertierbar

Bsp $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = A$, $\quad \lambda\cdot E_n - A = \begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda-4\end{pmatrix}$

Fall 1: $\lambda \neq 1$

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2\\ -3 & \lambda-4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{1-\lambda}\\ -3 & \lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{1-\lambda}\\ 0 & \lambda-4+\frac{6}{1-\lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{1-\lambda}\\ 0 & \frac{-\lambda^2+5\lambda+2}{1-\lambda}\end{pmatrix}$$

$$\lambda-4+\frac{6}{1-\lambda} = \frac{(1-\lambda)(\lambda-4)+6}{1-\lambda} = \frac{-\lambda^2+5\lambda+2}{1-\lambda}$$

invertierbar $\Leftrightarrow$ $-\lambda^2+5\lambda+2 \neq 0$

$\rightsquigarrow$ λ Eigenwert $\Leftrightarrow$ $\lambda^2-5\lambda-2=0$

$$\lambda^2-5\lambda-2 = \left(\lambda-\tfrac{5}{2}\right)^2-\tfrac{25}{4}-2 = \left(\lambda-\tfrac{5}{2}\right)^2-\tfrac{33}{4}$$

$$\left(\lambda-\tfrac{5}{2}\right)^2 = \tfrac{33}{4} \Leftrightarrow \lambda-\tfrac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{33}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2}.$$

Fall 2: $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix}0 & -2\\ -3 & -3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-3 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$ invertierbar.

$\rightsquigarrow$ Eigenwerte von $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ sind

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}.$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & \frac{2}{1-\lambda}\\ 0 & \frac{-\lambda^2+5\lambda+2}{1-\lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{4}{-3\pm\sqrt{33}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Eig}_{\lambda_2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix}\frac{-8s}{-3-\sqrt{33}}\\ s\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\begin{pmatrix}4\\ 3-\sqrt{33}\end{pmatrix}$$

Test: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 3-\sqrt{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+6-2\sqrt{33}\\ 12+12-4\sqrt{33}\end{pmatrix}$

$$\frac{5-\sqrt{33}}{2}\begin{pmatrix}4\\ 3-\sqrt{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10-2\sqrt{33}\\ \frac{15-8\sqrt{33}+33}{2}\end{pmatrix}. \checkmark$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix}\frac{-8s}{-3+\sqrt{33}}\\ s\end{pmatrix}, s\in\mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{span}\begin{pmatrix}4\\ 3+\sqrt{33}\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{33} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}$ sind offenbar eine Basis von $\mathbb{R}^2$. (5)

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = W_B \begin{pmatrix} 5+\sqrt{33} & 0 \\ 0 & 5-\sqrt{33} \end{pmatrix} \cdot W_B^{-1}$$

wo $W_B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3+\sqrt{33} & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}$.

<u>Bsp</u>

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} := A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E_n - A.$$

<u>Fall 1</u> $\lambda \neq 0$:

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/\lambda \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1/\lambda \\ 0 & \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

aber $\lambda^2+1 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ invertierbar für alle λ.

<u>Fall 2</u> $\lambda = 0$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar.

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ hat keine Eigenwerte.

<u>Satz</u> Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von A mit Eigenvektoren $s_i \neq 0$, so sind die s_i linear unabhängig.

⌜ Ist i der kleinste Index so dass $\{s_1, \dots, s_i\}$ linear abhängig ist so gilt

$$0 = t_1 s_1 + \dots + t_i s_i \quad \text{und } t_i \neq 0.$$

$$\rightsquigarrow \quad s_i = \frac{t_1}{t_i} s_1 + \dots + \frac{t_{i-1}}{t_i} s_{i-1}$$

$$\rightsquigarrow \quad \lambda_i s_i = A s_i = \frac{t_1}{t_i} A s_1 + \dots + \frac{t_{i-1}}{t_i} A s_{i-1}$$

$$= \frac{t_1}{t_i} \lambda_1 s_1 + \dots + \frac{t_{i-1} \lambda_{i-1}}{t_i} s_{i-1}$$

aber auch

$$\lambda_i s_i = \frac{t_1 \lambda_i}{t_i} s_1 + \dots + \frac{t_{i-1} \lambda_{i-1}}{t_i} s_{i-1}$$

$$\rightarrow \quad 0 = \frac{t_1}{t_i} (\lambda_1 - \lambda_i) s_1 + \dots + \frac{t_{i-1}}{t_i} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) s_{i-1}$$

was $t_1 = \dots = t_{i-1} = 0$ impliziert, da $\{s_1, \dots, s_{i-1}\}$ linear unabhängig ist.

im Widerspruch zu

$$0 = t_1 s_1 + \dots + t_i s_i \quad \text{mit } t_i \neq 0.$$ ⌟

⑥

Im allgemeinen ist es nicht einfach zu entscheiden ob A diagonalisierbar ist. Wir beschäftigen uns ab jetzt mit folgendem Spezialfall:

<u>Def</u> $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ heißt <u>symmetrisch</u> falls

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

<u>Allgemeiner:</u>

<u>Def</u> $A \in \mathrm{Mat}(m,n)$. Dann $A^T \in \mathrm{Mat}(n,m)$ durch $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

<u>Bsp</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A symmetrisch $\iff A = A^T$.

<u>Rechenregeln:</u>

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
- $(A^T)^T = A$.

⑦

Wir brauchen

Def Eine Menge B von Vektoren heißt <u>orthonormal</u> falls

$$\langle b, b' \rangle = \begin{cases} 0 & b \neq b' \\ 1 & b = b' \end{cases}$$

Anders gesagt: Je zwei Vektoren aus B stehen senkrecht auf einander, und alle haben Länge 1.

Eine Basis aus orthonormalen Vektoren heißt <u>Orthonormalbasis</u>.

<u>Lemma</u>: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ orthonormal so ist M linear unabhängig.

Insbesondere bilden n orthonormale Vektoren in $\mathbb{R}^n$ automatisch eine Basis.

⌐ Ist $0 = t_1 b_1 + \ldots + t_n b_n$ mit $t_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in B$ so gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \langle 0, b_i \rangle &= \langle t_1 b_1 + \ldots + t_n b_n, b_i \rangle \\ &= t_1 \langle b_1, b_i \rangle + \ldots + t_n \langle b_n, b_i \rangle \\ &= t_1 \cdot 0 + \ldots + t_i \cdot 1 + \ldots + t_n \cdot 0 \\ &= t_i . \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung folgt direkt aus

Steinitz. ⌋

Bsp st_n ist Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.

Thm (Hauptachsentransformation) $A \in Mat(n,n)$.
Dann sind äquivalent:

- Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$, so dass $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ symmetrisch ist.
- Für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ ist $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ symmetrisch.
- Es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$, so dass $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ diagonal ist.
- A ist symmetrisch.

Den Beweis (und den Algorithmus gibt es nächstes mal). Als Vorbereitung:

Satz: $\mathcal{B}$ ist geordnete Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ $W_{\mathcal{B}}^T = W_{\mathcal{B}}^{-1}$.

⌈ $$(W_{\mathcal{B}}^T \cdot W_{\mathcal{B}})_{ij} = \langle z_i^{W_{\mathcal{B}}^T}, s_j^{W_{\mathcal{B}}} \rangle = \langle s_i^{W_{\mathcal{B}}}, s_j^{W_{\mathcal{B}}} \rangle$$
$$= \langle b_i, b_j \rangle$$

also $\mathcal{B}$ ist Orthonormalbasis $\Leftrightarrow$ $W_{\mathcal{B}}^T \cdot W_{\mathcal{B}} = E_n$. ⌋

Gram-Schmidt-Verfahren

Gegeben ein linear unabhängiges System $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Ziel: Finde Orthonormalbasis B' von span(B). Schreibe $B = \{b_1, \dots, b_k\}$

Setze

$$b_1'' := b_1$$
$$b_2'' := b_2 - \frac{\langle b_1'', b_2 \rangle}{\langle b_1'', b_1'' \rangle} b_1''$$
$$b_3'' := b_3 - \frac{\langle b_1'', b_3 \rangle}{\langle b_1'', b_1'' \rangle} b_1'' - \frac{\langle b_2'', b_3 \rangle}{\langle b_2'', b_2'' \rangle} b_2''$$
$$\vdots$$
$$b_k'' := b_k - \frac{\langle b_1'', b_k \rangle}{\langle b_1'', b_1'' \rangle} b_1'' - \dots - \frac{\langle b_{k-1}'', b_k \rangle}{\langle b_{k-1}'', b_{k-1}'' \rangle} b_{k-1}''$$

Then clearly span$(b_1, \dots, b_k) =$ span$(b_1'', \dots, b_k'')$ so by Steinitz the b_i'' form a basis of span(B). Furthermore, we have

$$\langle b_i'', b_j'' \rangle = 0 \quad \text{for } i \neq j.$$

By a slightly annoying inductive calculation, z.B.

$$\langle b_1'', b_2'' \rangle = \left\langle b_1'', b_2 - \frac{\langle b_1'', b_2 \rangle}{\langle b_1'', b_1'' \rangle} b_1'' \right\rangle = \langle b_1'', b_2 \rangle - \langle b_1'', b_2 \rangle = 0$$

$$\langle b_2'', b_3'' \rangle = \left\langle b_2'', b_3 - \frac{\langle b_1'', b_3 \rangle}{\langle b_1'', b_1'' \rangle} b_1'' - \frac{\langle b_2'', b_3 \rangle}{\langle b_2'', b_2'' \rangle} b_2'' \right\rangle$$

$$= \cancel{\langle b_2'', b_3 \rangle} - \frac{\langle b_1'', b_3 \rangle \langle b_2'', b_1'' \rangle}{\langle b_1'', b_1'' \rangle} - \cancel{\langle b_2'', b_3 \rangle} = 0$$

Dann erfüllen

$$b_i' = \frac{1}{\sqrt{\langle b_i'', b_i''\rangle}}\, b_i''$$

zusätzlich

$$\langle b_i', b_i'\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\langle b_i'', b_i''\rangle}}\, b_i'', \frac{1}{\sqrt{\langle b_i'', b_i''\rangle}}\, b_i'' \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\langle b_i'', b_i''\rangle} \langle b_i'', b_i''\rangle = 1.$$

Also tut's $B' = (b_1', \dots, b_k')$.

__Bsp:__ $\underset{b_1''}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}, \underset{b_2''}{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}$

$$b_1'' = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$b_2'' = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \frac{11}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad b_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$b_2' = \frac{1}{\sqrt{\frac{20}{25}}}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \frac{5}{2\cdot\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$